
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01180540 5


ARBOR

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

DE RIEMANN

ESSAI D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE,
SUIVI D'UN APPENDICE SUR L'HISTOIRE ET LA PORTÉE PHILOSOPHIQUE
DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE

PAR

P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale de Belgique
et de la Société royale des sciences de Bohême

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1895

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

DE RIEMANN

ESSAI D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE,
SUIVI D'UN APPENDICE SUR L'HISTOIRE ET LA PORTÉE PHILOSOPHIQUE
DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE

PAR

P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale de Belgique
et de la Société royale des sciences de Bohême

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1895

ESSAI D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE

DES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE DE RIEMANN

---

1. *Introduction.* La géométrie euclidienne repose sur un certain nombre de postulats parmi lesquels se trouvent les deux suivants : 1° Deux droites ne peuvent contenir un espace. 2° Deux droites qui en rencontrent une autre en faisant avec celle-ci des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits, se coupent du côté où se trouvent ces angles.

Lorsqu'on laisse de côté le second de ces postulats, on obtient la géométrie non euclidienne de Lobatchefsky ; lorsque, en outre, on abandonne le premier, on arrive logiquement à la géométrie non euclidienne qui porte le nom de Riemannn, bien que ce grand analyste n'en ait donné que le principe fondamental, savoir que la droite est une ligne finie rentrante en elle-même.

Pour comprendre le sens de cette dernière proposition, on doit interpréter les définitions euclidiennes de la droite et du plan dans le sens qui leur a été attribué par Cauchy (1) et développé par M. De Tilly (2) : La notion de distance étant regardée comme une notion première irréductible, un point M est dit appartenir à la droite AB si aucun point de l'espace n'est distant de A et B comme l'est M. Un point M est dit appartenir au plan ABC, si aucun point de l'espace n'est distant de A, B et C comme l'est M. Un point quelconque M de l'espace est déterminé par ses distances à quatre points fixes A, B, C, D.

(1) *Sept leçons de Physique générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1868). Ces leçons ont été professées à Turin, en 1833. Voir pp. 44-45.

(2) *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* Bordeaux, Gounouilhou, 1879 (1er cahier du t. III de la 2e série des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*). — *Essai de Géométrie analytique générale* (*Mémoires couronnés et autres Mémoires de l'Académie royale de Belgique,* in-8°, t. XLVII ; ou *Mathesis,* décembre 1893).

En partant de ces notions et supposant finie la distance maxima 2Δ de deux points de l'espace, on démontre, comme on peut le voir dans le premier des ouvrages de M. De Tilly cités en note, que deux droites quelconques d'un même plan se coupent en deux points situés à la distance 2Δ. On en déduit que, dans un triangle riemannien, la somme des trois angles est supérieure à deux droits et, par suite, que, dans un quadrilatère riemannien, la somme des angles est supérieure à quatre droits (*Mathesis*, août 1894, t. XIV, pp. 180-185).

Ces préliminaires posés, voici comment on peut établir les principes fondamentaux de la géométrie riemannienne (1).

2. *Notations.* Considérons deux demi-droites OSO', OsO' faisant un angle aigu ; soient S et s leurs milieux. Les deux triangles OsS, O'sS étant égaux,

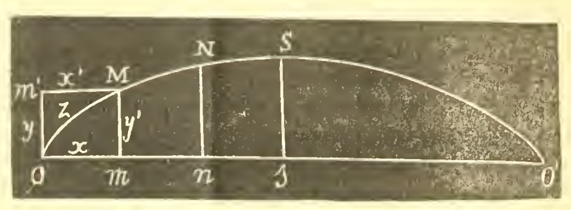


Fig. 1.

Ss est une perpendiculaire commune. Des points M, N de la droite OS, abaissons des perpendiculaires Mm, Nn sur Os ; de M abaissons aussi Mm' perpendiculaire sur Om' perpendiculaire à Om. Nous poserons

$$Om = x,\ Mm = y',\ Om' = y,\ Mm' = x'.$$

Ces quatre quantités varieront avec $OM = z$.

3. Théorème I. *L'angle* $OMm = (z, y)$ *croît avec* z (Fig. 1). La somme des angles du quadrilatère MNnm surpasse quatre droits ; comme les angles en m et n sont droits, on a donc

$$mMN + MNn > 2 \text{ droits}.$$

Mais

$$OMm + mMN = 2 \text{ droits}.$$

Donc

$$OMm < MNn.$$

(1) Nous imitons autant que possible les démonstrations de M. Gérard dans un excellent article sur la géométrie lobatchefskienne, intitulé : *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. X, pp. 74-81 ; février 1893). Plusieurs de ces démonstrations se trouvent en substance, dans le ch. IV du premier ouvrage cité de M. De Tilly. Voir aussi la dissertation inaugurale de M. Gérard : *Sur la Géométrie non euclidienne.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (un volume in-4° de 110 pages).

Corollaire. De O en S, tous les angles (z, y') sont aigus puisqu'ils sont plus petits que l'angle en S ; au delà, ils sont tous obtus.

4. Théorème II. *De O en S, y' croît ; de S en O', y' décroît* (Fig. 1'). Soit p le milieu de mn, pP perpendiculaire à mn ; $n\text{M}' = \text{M}m$; menons PM'. Le quadrilatère PM'np sera égal à MPpm. L'angle M'Pp = l'angle MPp sera aigu et, par suite, moindre que l'angle obtus NPp, si N est en deçà de S. Donc M' sera compris entre N et n ; par suite Mm, qui est égal à nM', sera inférieur à Nn. Ainsi, en deçà de S, y' croît avec z.

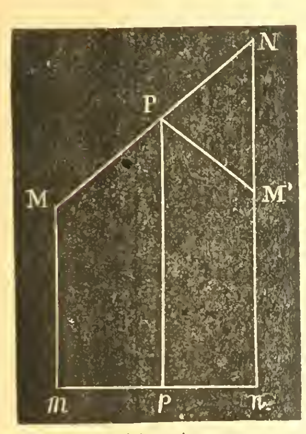


Fig. 1'.

On verrait de même que, au delà de S, y' décroît quand z croît.

5. Théorème III. *De O en S, $(x : z)$ croît ; de S en O', $(x : z)$ décroît.* Il suffit de faire la démonstration pour les points situés entre O et S. Dans le triangle PNM', l'angle N est plus grand que l'angle M', qui est égal au supplément de M ; par suite, PM' ou PM surpasse PN.

Donc, à mesure que l'on s'éloigne de O, à des accroissements égaux mp, pn de x, correspondent des accroissements de plus en plus petits de z ; par conséquent, $(x : z)$ croît, parce que le numérateur croît plus rapidement que le dénominateur.

Remarque. Si l'on compte les z à partir de S, les x à partir de s, il est clair que $(x : z)$, d'après la démonstration précédente, décroît quand z croît de S en O', puisque les accroissements de z sont de plus en plus grands à mesure



que l'on s'éloigne de O'.

6. Théorème IV. *De O en S, $(y' : z)$ décroît ; de S en O', $(y' : z)$ croît* (Fig. 1''). Il suffit encore de faire la démonstration pour les points situés entre O et S. Soient Q le milieu de MN ; Qq une perpendiculaire abaissée de Q sur mn ; Ma une perpendiculaire abaissée de M sur Qq, Nb une perpendiculaire abaissée de N sur Aq.

D'après la seconde partie du théorème II, on a

$$aq > \text{M}m, \quad bq > \text{N}n.$$

Les triangles égaux MQa, QbN donnent d'ailleurs

$$a\text{Q} = b\text{Q}.$$

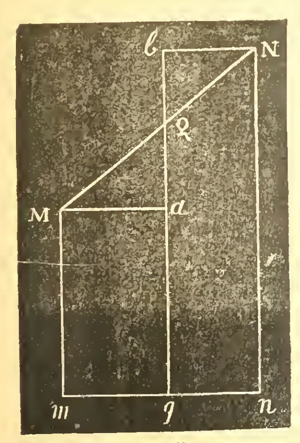


Fig. 1''.

ou

$$Qq - aq = bq - Qq.$$

En remplaçant dans cette égalité aq, bq par les quantités plus petites Mm, Nn, il viendra

$$Qq - Mm > Nn - Qq.$$

Donc à des accroissements MQ, QN égaux de z, correspondent des accroissements de plus en plus petits de y' à mesure que l'on s'éloigne de O ; par conséquent, $(y' : z)$ décroît quand z croît, pour les points situés entre O et S.

7. Théorème V. *Quand z tend vers zéro, $(x : z)$ tend vers une limite finie en décroissant, $(y' : z)$ vers une limite finie aussi, mais en croissant.* 1° D'après le théorème III, $(x : z)$ décroît quand z décroît ; donc $(x : z)$ a une limite finie ou nulle. 2° D'après le théorème IV, $(y' : z)$ croît quand z décroît ; donc $(y' : z)$ a une limite finie ou infinie. 3° D'après la seconde partie du théorème II, on a $x > x'$, donc

$$\frac{x}{z} > \frac{x'}{z}.$$

Mais $(x' : z)$, d'après ce qui vient d'être prouvé (2°), a une limite finie ou infinie ; donc $(x : z)$ qui surpasse $(x' : z)$ n'a pas une limite nulle. 4° De même, d'après la seconde partie du théorème II, on a $y' < y$, et aussi

$$\frac{y'}{z} < \frac{y}{z}.$$

Mais $(y : z)$ a une limite finie ou nulle d'après ce qui a été démontré au 1°. Donc $(y' : z)$, qui est inférieure à $(y : z)$, n'a pas une limite infinie.

Remarque. Si l'on compte les z à partir de S, les x à partir de s, on prouve de même que $(x : z)$ tend vers une limite finie en croissant, $(y' : z)$ vers une limite finie en décroissant.

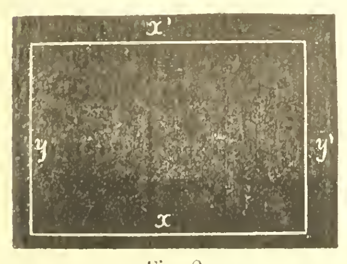


Fig. 2.

8. *Quadrilatère trirectangle.* Dans les nos 9 et 10, nous allons considérer (Fig. 2) un quadrilatère trirectangle (x, y, x', y').

Nous appelons x, y les côtés adjacents à deux angles droits, x', y' les côtés opposés. D'après le théorème II, on a

$$x' < x, \quad y' < y.$$

9. Théorème VI. *Dans un quadrilatère trirectangle où y' est constant et où x croît, x' croît de plus en plus lentement à mesure que x croît* (Fig. 2′). Soient

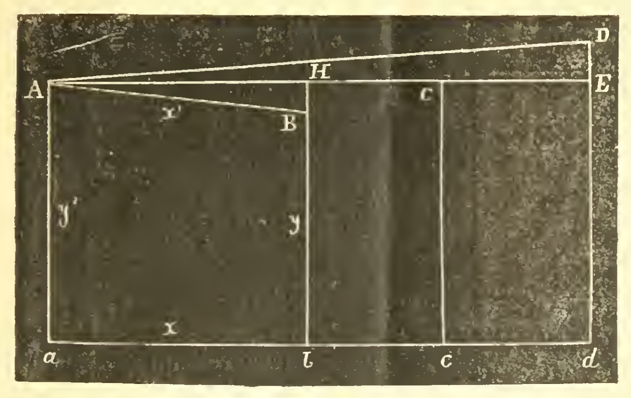


Fig. 2′.

AabB, AacC, AadD trois quadrilatères trirectangles, l'angle A étant obtus dans chacun d'eux ; nous supposons de plus $bc = cd$; il faut démontrer que l'on a

$$AC - AB > AC - AD.$$

Supposons que AC rencontre bB en H et dD en E. On a

$$HC = CE,$$

ou $$AC - AH = AE - AC.$$

Mais AH étant une oblique par rapport à AB, AE par rapport à AD, on a

$$AH > AB, \quad AE > AD.$$

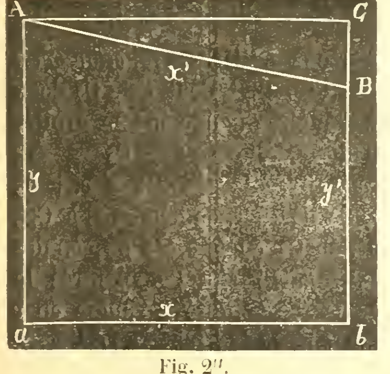


Fig. 2″.

On déduit de l'égalité précédente, au moyen de ces inégalités,

$$AC - AB > AD - AC.$$

10. Théorème VII. *Dans un quadrilatère trirectangle* (x, y, x', y') *où x tend vers zéro,* $(x' : x)$ *tend vers une limite* $\varphi(y)$ *inférieure à* $(x' : x)$, *mais* $(x' : x)$ *est inférieure à* $\varphi(y')$ (Fig. 2″). Soient AabB un quadrilatère (x, y, x', y') dont B est l'angle obtus, AabC un autre quadrilatère trirectangle dont A est l'angle obtus. D'après la remarque du n° 7, lorsque x décroît, le rapport $(x : x')$ croît ; le rapport inverse décroît et a donc une limite $\varphi(y)$ inférieure à $(x' : x)$. D'après le théorème VI, quand y

décroît, $(AC : x)$ croît et tend vers une limite $\psi(y)$ supérieure à $(AC : x)$. D'ailleurs la perpendiculaire AC est plus petite que l'oblique AB. Donc

$$\frac{AC}{ab} < \frac{AB}{ab},$$

et, à la limite,

$$\psi(y) \overline{\lt} \varphi(y).$$

Puisque $\psi(y)$ surpasse $(AC : x)$, on a donc aussi

$$\varphi(y) > \frac{AC}{x}.$$

Dans le quadrilatère $AabB$, Bb joue le même rôle que y dans $AabC$; donc, d'après la dernière inégalité,

$$\varphi(Bb) > \frac{AB}{ab}.$$

Résumant ces divers résultats, on a enfin

$$\varphi(y) < \frac{x'}{x} < \varphi(y').$$

REMARQUE. Puisque x' est $< x$, la fonction $\varphi(y)$ est inférieure à l'unité, sauf pour $y = 0$, auquel cas, on voit directement que $\varphi(y) = 1$.

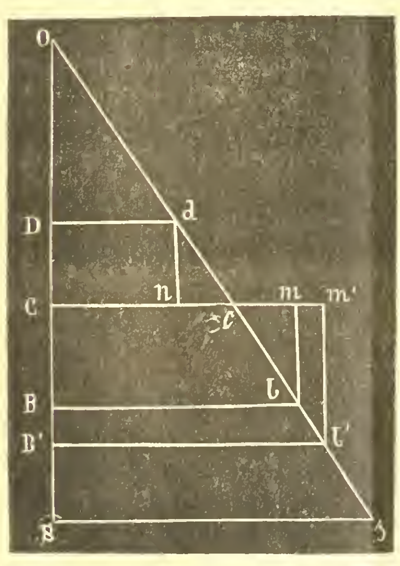


Fig. 3.

11. THÉORÈME VIII. *La fonction* φ *est continue* (Fig. 3). Soient OS, Os deux perpendiculaires à une même droite, de manière que $OS = Os = \Delta$; $SB = x - y$, $SC = x$, $SD = x + y$; Bb, Cc, Dd des perpendiculaires à OS, rencontrant Os en b, c, d; dm, bn des perpendiculaires sur Cc. D'après le théorème III, appliqué à l'angle en c commun aux trois triangles cnd, cmb, CcO, on a $cb < cd$ et, de plus,

$$\frac{cm}{cb} < \frac{cC}{cO}, \quad \frac{cn}{cd} < \frac{cC}{cO}.$$

On peut écrire la première de ces relations sous la forme

$$\mathrm{C}m - \mathrm{C}c < \mathrm{C}c\,\frac{cb}{c\mathrm{O}},$$

et, en divisant par Ss,

$$\frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{S}s} - \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{S}s} < \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{S}s}\,\frac{cb}{c\mathrm{O}},$$

ou encore

$$\left(\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{S}s} : \frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{C}m}\right) - \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{S}s} < \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{S}s}\,\frac{cb}{c\mathrm{O}}. \qquad (\alpha)$$

D'après le théorème VII, si Ss et, par suite, Bb, Cm tendent vers zéro, on a

$$\lim \frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{S}s} = \varphi(y - y),$$

$$\lim \frac{\mathrm{B}b}{cm} = \varphi(y),$$

$$\lim \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{S}s} = \varphi(x).$$

D'ailleurs $\lim cb = \mathrm{CB} = y$, $\lim c\mathrm{O} = \mathrm{CO} = \Delta - x$. Donc l'inégalité ($\alpha$) donne, à la limite,

$$\frac{\varphi(x - y)}{\varphi(y)} - \varphi(x) \leqq \frac{y}{\Delta - x}\,\varphi(x),$$

c'est-à-dire,

$$\varphi(x - y) - \varphi(x)\,\varphi(y) \leqq \frac{y}{\Delta - x}\,\varphi(x)\,\varphi(y). \qquad (\beta)$$

De la relation

$$\frac{cn}{cd} < \frac{c\mathrm{C}}{c\mathrm{O}},$$

on tire de même

$$\varphi(x)\,\varphi(y) - \varphi(x + y) \leqq \frac{y}{\Delta - x}\,\varphi(x)\,\varphi(y). \qquad (\gamma)$$

En ajoutant les relations (β) et (γ), on trouve

$$\varphi(x - y) - \varphi(x + y) \leqq \frac{2y}{\Delta - x}\,\varphi(x)\,\varphi(y) < \frac{2y}{\Delta - x}.$$

Cette inégalité exprime que φ est une fonction continue.

12. **Théorème IX.** *On a* $\varphi(x-y)+\varphi(x+y)=2\varphi(x)\,\varphi(y)$. D'après le théorème III, $cd > cb$; par suite, on a aussi

$$cn > cm,$$

ou successivement

$$Cc - Cn > Cm - Cc,$$

$$2\,Cc > Cm + Cn,$$

$$2\,Cc > \left(\frac{Bb}{Ss} : \frac{Bb}{Cm}\right) + \left(\frac{Dd}{Ss} : \frac{Dd}{Cn}\right),$$

et, à la limite,

$$2\varphi(x) \geqq \frac{\varphi(x-y)}{\varphi(y)} + \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)},$$

ou

$$2\varphi(x)\,\varphi(y) \overset{=}{>} \varphi(x-y) + \varphi(x+y). \qquad (\delta)$$

2° Soit $BB' = \alpha$, une quantité fixe aussi petite qu'on le veut. Menons $B'b'$ perpendiculaire à SO, $b'm'$ perpendiculaire à Cc. On a

$$cb' > CB' - B'b' - Cc > CB + \alpha - 2Ss = CD + \alpha - 2Ss.$$

Donc, si l'on rend Ss égal ou inférieur à $\frac{1}{2}\alpha$, cb' est plus grand que CD et, à fortiori que cd ; par suite, on a

$$cm' > cn,$$

et, successivement,

$$Cm' - Cc > Cc - Cn,$$

$$Cm' + Cn > 2Cc,$$

$$\left(\frac{B'b'}{Ss} : \frac{B'b'}{Cm'}\right) + \left(\frac{Dd}{Ss} : \frac{Dd}{Cn}\right) > \frac{2Cc}{Ss},$$

et, à la limite,

$$\frac{\varphi(x-y-\alpha)}{\varphi(y+\alpha)} + \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)} \overset{=}{>} 2\varphi(x)$$

3° On déduit de là, en faisant tendre α vers zéro,

$$\varphi(x-y) + \varphi(x+y) \overset{=}{>} 2\varphi(x)\,\varphi(y).$$

Rapprochant cette relation de (δ), on en tire

$$\varphi(x-y) + \varphi(x+y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y).$$

Remarque. Dans le cas où l'on a $x = y$, la démonstration doit être légèrement modifiée. Au lieu de considérer un point B' voisin de B, on en considère un voisin de D, entre C et D.

13. Théorème X. *On a* $\varphi(z) = \cos\left(\frac{z}{k}\right)$, *k étant une constante.* On a $\varphi(0) = 1$, et $\varphi(x) < 1$, si x est différent de zéro. Posons

$$\varphi(x) = \cos t.$$

En calculant successivement $\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{4}x\right)$, etc., par la formule

$$\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1,$$

déduite de

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y), \qquad (\epsilon)$$

en faisant $x = y$, on trouve

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\frac{1}{2}t,\ \varphi\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\frac{1}{4}t, \text{ etc.}$$

Posant ensuite, p étant un entier quelconque,

$$\frac{1}{2^p}x = \mathrm{X},\ \frac{1}{2^p}t = \mathrm{T},$$

de la relation

$$\varphi(\mathrm{X}) = \cos\mathrm{T},$$

on tire successivement $\varphi(2\mathrm{X})$, $\varphi(3\mathrm{X})$, etc., par la formule (ϵ) et, en général,

$$\varphi(n\mathrm{X}) = \cos n\mathrm{T},$$

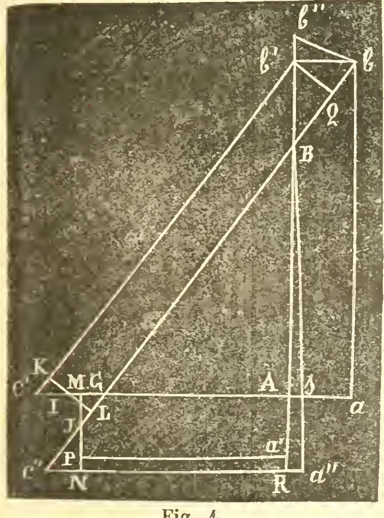


Fig. 4.

n étant un entier quelconque, pourvu que $n\mathrm{X}$ ne surpasse pas Δ. Soient ensuite

$$n\mathrm{X} = z,\quad n\mathrm{T} = n\mathrm{X}.\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{X}} = \frac{z}{k},$$

la dernière relation pourra s'écrire

$$\varphi(z) = \cos\left(\frac{z}{k}\right).$$

14. Théorème XI. *Dans un triangle rectangle on a la relation* $\varphi(a) = \varphi(b)\,\varphi(c)$ *entre l'hypoténuse a et les côtés b* et *c* (1). Soit le triangle ABC; d'un point b pris sur le prolongement de l'hypoténuse abaissons ba perpendiculaire sur AC; faisons glisser le triangle abC le long de AC jusqu'en A$b'c'$, puis le long de BC, jusqu'en a''Bc''. Par le milieu I de Cc' menons à BC une perpendiculaire

(1) Cette démonstration est empruntée presque textuellement à l'article cité de M. Gérard, *mutatis mutandis.*

KL qui sera aussi perpendiculaire à $b'c'$, en un point K tel que IK = IL. De même, la perpendiculaire JM à la droite AC, menée par le milieu de Cc'' est aussi perpendiculaire à $a''c''$ en un point N, tel que JN = JM. Enfin menons $b'Q$ perpendiculaire à BC et bb'' perpendiculaire sur AB. Nous avons vu que, si l'on fait tendre Bb vers zéro, on a

$$\lim \frac{bb''}{Bb} = \lim \frac{b'Q}{b'B};$$

de même

$$\frac{MJ}{JC} \text{ et } \frac{IL}{IC}$$

tendent vers la même limite ; donc

$$\lim \frac{MN}{Cc''} = \lim \frac{KL}{Cc'}.$$

D'où, en divisant membre à membre et remarquant que $Cc'' = Bb$ et $Cc' = Aa$

$$\lim \frac{bb''}{MN} = \lim \frac{b'Q}{KL} . \lim \frac{Aa}{Bb'}$$

ou, en transposant,

$$\lim \frac{b'Q}{KL} = \lim \frac{bb''}{Aa} . \lim \frac{MN}{Bb'}.$$

Je dis que cette relation est identique à la suivante :

$$\varphi(a) = \varphi(c)\ \varphi(b).$$

En effet, d'après le théorème VII,

$$\varphi(LQ) < \frac{b'Q}{KL} < \varphi(Kb').$$

Or quand Bb tend vers zéro, LQ et Kb' tendent vers BC = a, et, d'après le théorème VIII, $\varphi(LQ)$ et $\varphi(Kb')$ tendent vers $\varphi(a)$. Donc

$$\lim \frac{b'Q}{KL} = \varphi(a).$$

On prouve de même que

$$\lim \frac{bb''}{Aa} = \varphi(c).$$

Reste à chercher la limite de $\frac{Bb'}{MN}$. Appelons s le point de rencontre de Ba'' avec AC ; on aura l'oblique Bs plus grande que la perpendiculaire BA ; donc, puisque $Ab' = Ba''$, on a $Bb' > sa''$. Par suite,

$$\frac{Bb'}{MN} > \frac{sa''}{MN} > \varphi(Na'').$$

Prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en R avec $a''c''$; l'oblique BR étant plus longue que la perpendiculaire $Ba'' = Ab'$, portons sur BR une longueur $Ba' = Ab'$; le point a' tombera entre B et R. Du point a', abaissons $a'P$ perpendiculaire sur MN. On aura

$$\frac{Bb'}{MN} < \frac{Bb'}{MP} = \frac{Aa'}{MP} < \varphi(Pa') < \varphi(AM - PM - Aa').$$

Résumant les dernières inégalités, il vient

$$\varphi(AM - PM - Aa') > \frac{Bb'}{MN} > \varphi(Na'')$$

et, à la limite,

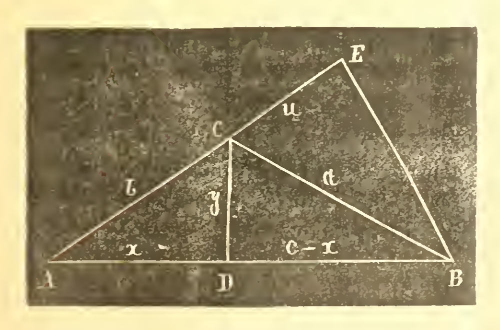
$$\varphi(b) = \varphi(AC) = \lim \frac{Bb'}{MN}$$

Remarque. On observera que le théorème précédent ne suppose pas connue la forme de la fonction φ ; il suffit que l'on sache que cette fonction est continue.

Il est bon de remarquer aussi que l'on suppose implicitement en plusieurs endroits de la démonstration que les longueurs considérées sont inférieures à Δ ; il en est de même dans plusieurs des démonstrations précédentes. Cette restriction n'entraîne aucun inconvénient. Une fois les principes fondamentaux établis pour des figures suffisamment petites, on les étend aisément par l'analyse à tous les autres cas.

15. Théorème XII. *Dans un triangle* ABC *quelconque, on a entre les trois côtés* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, *la relation*

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right) \cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right) \sin\left(\frac{c}{k}\right) \cos A.$$



Supposons l'angle A aigu. Des points B et C abaissons les perpendiculaires BE, CD sur les côtés opposés. Posons $AD = x$, $CE = u$. On aura, dans CBD,

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{y}{k}\right) \cos\left(\frac{c-x}{k}\right)$$

ou, en développant,

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{y}{k}\right) \cos\left(\frac{c}{k}\right) \cos\left(\frac{x}{k}\right) + \cos\left(\frac{y}{k}\right) \sin\left(\frac{c}{k}\right) \sin\left(\frac{x}{k}\right).$$

Mais, dans ACD,

$$\cos\left(\frac{y}{k}\right)\cos\left(\frac{x}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right).$$

La valeur de $\cos\left(\frac{a}{k}\right)$ peut donc s'écrire

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

La considération des triangles CBE, ABE conduit de même à la relation

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{b+u}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{c}{k}\right)}$$

On obtient donc la relation indiquée si l'on pose

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{b}{k}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{b+u}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{c}{k}\right)},$$

comme on en a le droit, puisque les expressions du second membre sont inférieures à l'unité et ne dépendent pas de la grandeur des côtés b et x de l'angle A. Par suite, cos A est égale à lim $(x : b)$, si b décroît indéfiniment (1).

En supposant l'angle A obtus, on arrive à la même formule, à condition de définir le cosinus d'un angle obtus comme égal à *moins* le cosinus du supplément de cet angle.

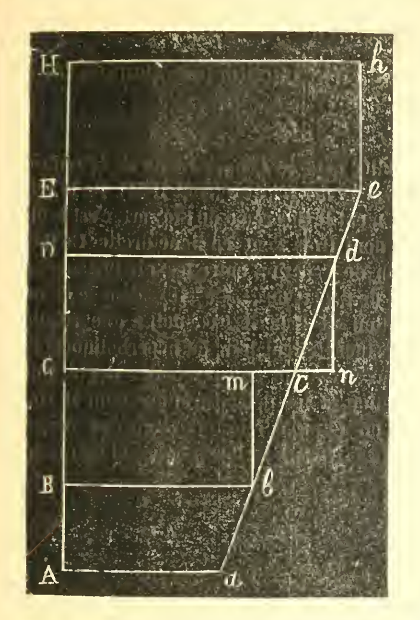
16. *Comparaison avec la géométrie lobatchefskienne.* L'exposé précédent, le n° 11 et le 2° du n° 12 exceptés, est une simple transposition de celui que M. Gérard a donné pour la géométrie lobatchefskienne, dans l'article cité en note, au n° 1. Inversement, il est facile à celui qui n'a pas à sa disposition l'article de M. Gérard de le reconstruire au moyen de ce qui précède, en partant de cette proposition fondamentale : *la somme des trois angles d'un triangle est inférieure à deux droits.*

En géométrie lobatchefskienne, on n'a pas besoin de prouver explicitement le théorème relatif à la continuité de la fonction $f(y)$, limite de $(x' : x)$ dans un quadrilatère trirectangle $(x,\ y,\ x',\ y')$, et l'on démontre un peu plus simplement qu'en géométrie riemannienne le théorème

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y).$$

(1) Si l'on suppose k infini, on a, comme l'on sait, la géométrie euclidienne ; on trouve alors $\cos A = (x : b)$, ce qui prouve que les cosinus d'angle ont le même sens dans tous les systèmes de géométrie.

Voici l'esquisse de cette démonstration pour ceux de nos lecteurs qui ne peuvent consulter l'article de M. Gérard. Soient AH, ae deux perpendiculaires à une même droite Aa; AB $= x - y$, AC $= x$, AD $= x + y$, EH $= y$ diverses longueurs portées sur AH; Bb, Cc, Dd, Ee des perpendiculaires à AH rencontrant ae en b, c, d, e; Hh une perpendiculaire à AH, eh une perpendiculaire à Hh, bm, dn des perpendiculaires à Cc.



On prouve aisément que l'on a $cd > cb$ et par suite, $cn > cm$, $2\mathrm{C}c > \mathrm{C}m + \mathrm{C}n$, puis, comme au n° 12, 1°,

$$2f(x)\,f(y) \overline{\overline{<}}\, f(x - y) + f(x + y). \qquad (\zeta)$$

On a ensuite

$$\frac{cm}{cb} > \frac{cn}{cd} \quad \text{ou} \quad \frac{cn}{cm} < \mu, \quad \text{si } \mu = \frac{cd}{cb}.$$

L'inégalité $\frac{cn}{cm} > \mu$ donne $\mathrm{C}n - \mu\mathrm{C}m < \mathrm{C}c\,(1 + \mu)$, puis en divisant par A$a$ et faisant tendre Aa vers zéro,

$$f(x + y) + f(x - y).\ \lim \mu \leqq f(x)\,f(y).\ \lim\,(1 + \mu).$$

Mais

$$\lim \mu = \lim\,(cd : cb) = (\mathrm{CD} : \mathrm{CB}) = 1.$$

Donc

$$f(x + y) + f(x - y) \leqq 2f(x)\,f(y). \qquad (\eta)$$

Des relations (ζ) et (η), on déduit

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)\,f(y).$$

On prouve ensuite que

$$f(z) = \mathrm{Ch}\left(\frac{z}{k'}\right),$$

après avoir observé que la fonction $f(z)$ est supérieure à l'unité, sauf pour $z = 0$. Cette démonstration se fait plus facilement que pour le théorème correspondant en géométrie riemannienne parce que z peut croître indéfiniment sans que f change de signe.

La relation entre les trois côtés d'un triangle est

$$Ch\left(\frac{a}{k'}\right) = Ch\left(\frac{b}{k'}\right)\ Ch\left(\frac{c}{k'}\right) - Sh\left(\frac{b}{k'}\right)\ Sh\left(\frac{c}{k'}\right) \cos A,$$

cosA ayant encore le même sens qu'en géométrie euclidienne, comme on le voit en faisant croître k' indéfiniment (1).

(1) Une esquisse du présent mémoire a été publiée dans le *Compte-rendu de la réunion d'Oxford de l'Association britannique pour l'avancement des sciences* (août 1894). De la relation entre les trois côtés d'un triangle on déduit aisément le théorème de Stewart, c'est-à-dire la relation entre les six distances de quatre points dont trois sont en ligne droite. Ce théorème de Stewart permet ensuite d'établir la relation de Schering entre les dix distances de cinq points dans l'espace, relation qui est le point de départ de M. De Tilly, dans le second mémoire cité en tête de ce travail. Enfin, la relation de Schering conduit à une relation entre les quinze distances de six points où les cosinus (circulaires ou hyperboliques) des distances (divisées par k ou k') de deux d'entre eux n'entrent qu'au premier degré. Nous espérons pouvoir publier ultérieurement cette relation et les démonstrations dont il vient d'être question. — Le présent mémoire est extrait du *Compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques*, Section des sciences mathématiques et naturelles, pp. 12-25.

APPENDICE

I. Sur l'histoire de la géométrie non euclidienne.

On peut résumer comme il suit l'histoire de la géométrie non euclidienne, dans sa première partie, c'est-à-dire avant que Cayley et Klein en aient signalé les points de contact avec la théorie des coniques (1). Lobatchefsky (1793-1856 a publié ses recherches sur ce sujet à Kasan, en 1829 (et même en 1826) et en 1836, 1837, 1838 ; à Berlin, en 1837, dans le *Journal de Crelle* et, en 1840, dans une brochure spéciale. Il a résumé l'ensemble de ses travaux dans sa *Pangéométrie* publiée en français en 1855, à Kasan. Dans tous ses écrits, il expose scientifiquement la géométrie, en faisant abstraction du postulat de la parallèle unique.

Jean Bolyai (1802-1860) fit connaître, en 1832, dans un appendice à un ouvrage de son père, W. Bolyai, des idées tout à fait analogues.

La correspondance de Gauss avec Schumacher prouve que le grand géomètre de Gœttingue était arrivé aussi, avant 1831, au système de géométrie de Lobatchefsky et de Bolyai.

(1) Voir dans notre brochure intitulée : *Notes sur la géométrie euclidienne et non euclidienne,* quelques vues d'Ampère et de Fourier sur les principes de la Géométrie, ainsi qu'une étude sur les postulats d'Euclide.

En 1854, à l'instigation de Gauss, Riemann, dans une leçon inaugurale publiée seulement après sa mort, soumit les bases de la géométrie à une étude approfondie, et trouva ainsi un système de géométrie différent à la fois de celui d'Euclide et de celui de Lobatchefsky.

On peut caractériser les systèmes d'Euclide, de Lobatchefsky et de Riemann par les relations

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Euclide)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

$$\text{Ch}\, a\eta = \text{Ch}\, b\eta \ \text{Ch}\, c\eta \text{ (Lobatchefsky)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(L)}$$

$$\cos a\epsilon = \cos b\epsilon \cos c\epsilon \text{ (Riemann)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(R)}$$

qu'ils établissent entre l'hypoténuse a et les deux côtés d'un triangle rectangle ; ϵ et η sont des quantités constantes, que l'on doit supposer extrêmement petites dans les applications des géométries non euclidiennes au monde physique. Les cosinus qui entrent dans la formule (R) sont définis d'une manière purement analytique par le développement en série, $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 +$ etc.

On peut imaginer d'autres systèmes de géométrie, caractérisés par des relations entre a, b, c, d'une forme différente des trois précédentes, mais ces systèmes n'ont plus aucun rapport avec la géométrie physique, comme l'a prouvé M. De Tilly (1879).

Il est facile de voir que, pour ϵ et η décroissant indéfiniment, les formules (L) et (R) tendent indéfiniment vers (E) ; autrement dit, les géométries non euclidiennes diffèrent aussi peu qu'on le veut de la géométrie euclidienne et, par suite, s'appliquent comme elle au monde physique. La géométrie plane, dans le système de Riemann, est identique à la géométrie euclidienne sur une sphère. M. Beltrami (1868) a montré que la géométrie plane de Lobatchefsky est identique à la géométrie euclidienne sur la pseudosphère (surface engendrée par la développante d'une chaînette tournant autour de la directrice de celle-ci). Il en résulte l'impossibilité de démontrer le postulatum par un raisonnement de géométrie plane. En 1873, M. De Tilly a prouvé qu'aucun raisonnement géométrique quelconque ne pouvait conduire à une vraie preuve du postulatum. Autrement dit, la notion euclidienne de la droite ne contient pas le postulatum.

Dans le livre publié par le P. Saccheri, en 1733, sur les principes de la géométrie et dont nous avons donné une analyse détaillée (1), cet auteur est arrivé, un siècle à peu près avant Lobatchefsky, aux premiers principes de la géométrie non euclidienne. Une erreur radicale sur l'emploi de l'infini en mathématiques a empêché l'ingénieux géomètre italien de faire, sous une forme explicite, la découverte de la géométrie générale (2).

(1) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, 2e partie, pp. 46-59, ou la brochure citée à la page précédente, pp. 15-29.

(2) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1890, t. XIV, 1re partie, pp. 43-45.

II. Sur les recherches de Schering en métagéométrie.

M. Ernest Schering, professeur à l'Université de Göttingen, à qui l'on doit l'admirable édition des *Œuvres* de Gauss, publiée sous le patronage de l'Académie de cette ville, a fait paraître sur les géométries non euclidiennes quelques articles sur lesquels il nous semble utile d'attirer l'attention.

En voici les titres : 1. *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (Nachrichten de Göttingen, 13 juillet 1870, pp. 311-321). 2. *Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen* (Ib., 1873, n° 2, pp. 13-21). 3. *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannchen Räumen* (Ib., 1873, n° 6, pp. 149-159). 4. *Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte deren Maas von der Bewegung der Körper abhängt* (Mémoires de Göttingen, t. XVIII, 1873, 54 p. in-4° ; résumé dans les Nachrichten, 1873, n° 26, pp. 744-753). Le § VII de ce Mémoire traite du mouvement dans les espaces non euclidiens (pp. 35-37).

On trouve, dans ces articles, quelques idées fondamentales dont M. Schering semble le premier auteur et qu'à ce titre il est juste de signaler :

« I. Dans un espace de Gauss, il existe entre les dix distances de cinq points, 1, 2, 3, 4, 5, la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (21) & (22) & (23) & (24) & (25) \\ (31) & (32) & (33) & (34) & (35) \\ (41) & (42) & (43) & (44) & (45) \\ (51) & (52) & (53) & (54) & (55) \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

où $(ik) = \text{Ch.}\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$, $(\Delta_{ik} : u)$ désignant la distance Δ_{ik} des points i et k, mesurée au moyen de l'unité absolue de longueur u, et où $(11) = (22) = (33) = (44) = (55) = 1$.

Des relations analogues, où les déterminants ont respectivement trois ou quatre lignes, définissent respectivement la droite et le plan ou donnent la condition pour que trois points soient en ligne droite et pour que quatre points appartiennent à un plan (1er article, pp. 312-313).

II. Ce théorème, moyennant quelques changements dans les termes, peut, sans aucune autre supposition auxiliaire, servir de base unique à un système complet de géométrie dont la géométrie euclidienne est un cas particulier correspondant à $u = \infty$ (1er article, p. 313).

III. La relation anologue à (1), mais où entre un déterminant à $(n+2)$ lignes,

$$\Sigma \pm (11)(22)\ldots(n+2, n+2) = 0,$$

caractérise un espace à n dimensions, soit infini (espace de Gauss) si $(i, k) = \mathrm{Ch}\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$, soit fini (espace de Riemann) si $(i, k) = \cos\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$. (2[e] article, p. 15). »

Nous avons publié la relation (S), avec diverses conséquences, dans les *Annales de la Société scientifique* (1890-1891, t. XV, 1[re] partie, pp. 8-11) (1), en la donnant comme nouvelle. On voit qu'en réalité elle est assez ancienne et est due à M. Schering; c'est lui aussi, semble-t-il, qui a eu, le premier, l'idée de caractériser un espace à n dimensions par la relation qui existe entre les distances de $(n+2)$ points. Comme nous l'avons fait observer (*Annales*, 1888-1889, t. XIII, 1[re] partie, p. 59), M. De Tilly a exprimé, en 1887, la même idée, à laquelle il est arrivé sans connaître les articles de M. Schering (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3[e] série, t. XIV, p. 1015, fin de la note 14).

Dans les théorèmes cités plus haut, M. Schering appelle *espace de Gauss* ce que l'on appelle généralement *espace de Lobatchefsky*, c'est-à-dire espace où, par un point, on peut mener plus d'une parallèle à une droite.

Il nous semble que, jusqu'à preuve du contraire, la géométrie non euclidienne des espaces infinis doit continuer à porter le nom du géomètre de Kasan. La première publication de Lobatchefsky sur la métagéométrie date de 1826. Or, la lettre la plus ancienne de Gauss, où il donne un vrai théorème de géométrie non euclidienne métrique, semble être celle du 12 juillet 1831, adressée à Schumacher. Il serait intéressant de rechercher dans les papiers de Gauss ou dans ses lettres antérieures à 1826, un passage qui permît de décider s'il connaissait ou non plus que les premiers éléments de la métagéométrie; on sait qu'il s'est occupé des principes de la géométrie dès 1792, mais rien ne prouve jusqu'à présent, croyons-nous, qu'il ait vraiment devancé Lobatchefsky dans la connaissance approfondie des théories non euclidiennes.

Cependant, il est très probable que tout le mouvement d'idées qui a renouvelé, depuis soixante ans, la critique des fondements de la géométrie, émane de Gauss. Par ses amis, Bartels, professeur de Lobatchefsky à l'Université de Kasan, et Wolfgang Bolyai, père de Jean Bolyai, il est presque certain qu'il a eu une influence indirecte sur Lobatchefsky et Jean Bolyai ; d'autre part, c'est lui qui a poussé Riemann à étudier les hypothèses qui servent de base à la géométrie et à écrire son célèbre Mémoire. Les recherches de Gauss sur la courbure des surfaces ont aussi été l'origine de celles de Beltrami et l'on peut rattacher les travaux de S. Lie au Mémoire de Riemann dont il vient d'être question. On peut donc dire, en un certain sens, que Gauss est l'initiateur des deux géométries non euclidiennes (2).

(1) Voir aussi pp. 19-32 de la brochure citée à la page 16.
(2) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1891-1892, t. XVI, pp. 51-53.

III. Sur la portée philosophique de la Métagéométrie.

Dans un discours récent de Mgr d'Hulst, se trouve le passage suivant, où le savant recteur de l'Université catholique de Paris accuse les géomètres modernes d'une espèce de scepticisme.

« Autrefois, on prenait pour base de la géométrie abstraite l'espace réel, avec les lois que l'expérience révèle, avec les trois dimensions auxquelles sont soumis tous les corps qui tombent sous nos sens. Aujourd'hui, les géomètres s'affranchissent de ces conditions vulgaires ; ils supposent des espaces différents, à quatre, cinq, six dimensions ou davantage ; ils appliquent à ces hypothèses fantastiques l'analyse mathématique, et les voilà partis, dans un monde imaginaire, à la poursuite de conclusions très logiquement déduites, mais devant lesquelles l'esprit se perd.

» Puis, quand ils reviennent à ce vieil espace traditionnel au sein duquel nous habitons, ils prétendent que ses lois n'ont pas, devant la raison, plus de valeur que les espaces étranges où la somme des angles d'un triangle est inférieure ou supérieure à deux angles droits, où une ligne courbe peut servir de parallèle à une ligne droite. Le résultat de cette débauche d'analyse, c'est le scepticisme mathématique. »

Cette opinion de l'éminent auteur des *Mélanges philosophiques* est fondée sur un malentendu qu'il importe de dissiper et sur une connaissance imparfaite des recherches des mathématiciens sur les principes de la géométrie. En premier lieu, les espaces à plus de trois dimensions dont s'occupent les mathématiciens n'ont rien de fantastique ni d'hypothétique. Ce sont simplement des groupes de quatre, de cinq ou d'un plus grand nombre de variables auxquels ils appliquent une terminologie calquée sur celle de la géométrie analytique à trois dimensions.

Cette terminologie est extrêmement utile, parce que l'on suit plus facilement les raisonnements relatifs à quatre, cinq ou un plus grand nombre de variables, quand on emploie un langage qui rappelle sans cesse les raisonnements analogues sur trois variables, lesquels sont susceptibles d'une traduction géométrique, si l'on regarde les trois variables comme les coordonnées d'un point.

Les profanes seuls s'imaginent que les mathématiciens attachent une représentation géométrique aux espaces à plus de trois dimensions. La chose toutefois est possible, mais dans un sens autre que celui qui vient d'être signalé, même en ne sortant pas de la géométrie plane. Ainsi, l'ensemble de cinq variables peut être représenté géométriquement par la conique ayant ces variables pour coefficients de son équation ; ce que l'on exprimera, d'une manière abrégée, en disant que toutes les coniques d'un plan représentent un espace à cinq dimensions.

En second lieu, l'espace traditionnel, c'est-à-dire l'espace euclidien, n'est ni plus ni moins étrange que les espaces lobatchefskiens ou riemanniens.

Pour le montrer, considérons d'abord la géométrie physique, expérimentale. Dans cette géométrie, on s'occupe principalement des relations de distance qui existent entre les points des solides invariables ou supposés tels. Etant données neuf des distances mutuelles des cinq sommets, A, B, C, D, E, par exemple, d'un hexaèdre à faces triangulaires, la dixième distance est évidemment déterminée. Pour exprimer la relation qui existe entre ces dix distances, les Grecs ont imaginé une géométrie idéale, consignée dans les *Éléments* d'Euclide ; Lagrange en a déduit une formule célèbre qui permet de calculer la dixième distance DE, quand on connaît AB, BC, CA, DA, DB, DC, EA, EB, EC. Lorsque l'on mesure réellement la distance DE, on trouve toujours un accord complet entre l'expérience et le résultat donné par la géométrie idéale euclidienne. Cette géométrie idéale constitue donc une théorie physique parfaite : elle n'est jamais en défaut, au point de vue de la concordance de ses prédictions avec les résultats des mesures les plus exactes.

Cependant, pour les mathématiciens, pendant longtemps, elle n'a pas été considérée comme parfaite. Elle contient au moins une hypothèse fondamentale : le postulat de la parallèle unique. On peut, à propos de ce postulat, se poser les trois questions suivantes : 1° Est-il une suite de la définition euclidienne, historique de la droite ? 2° Est-il en contradiction avec cette définition de la droite ? 3° En est-il indépendant ? Pour répondre à ces questions, on a transformé le postulat de bien des manières. On a montré, par exemple, qu'il est équivalent au théorème de Pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$, qui lie l'hypoténuse a d'un triangle rectangle aux deux autres côtés, b et c.

De notre temps seulement, après des recherches très délicates de Gauss, Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, Beltrami, Schering, De Tilly, Poincaré, on a pu achever la géométrie euclidienne comme œuvre logique ; on a pu répondre aux trois questions ; *non* à la première ; *non* à la seconde ; *oui* à la troisième. De plus, on on a trouvé que l'on pouvait imaginer deux théories géométriques non euclidiennes, pouvant servir à représenter tout aussi bien la géométrie euclidienne, les relations entre les distances, pouvant servir comme elle à les calculer avec une exactitude aussi grande qu'on le veut (1). Il suffit pour cela de remplacer le théorème de Pythagore par le théorème plus général : $\cos (a\epsilon) = \cos (b\epsilon) \cos (c\epsilon)$, où ϵ^2 est une quantité extrêmement petite, positive ou négative, ou de substituer, à la relation de Lagrange, une relation analogue de Schering.

Si l'on demande au mathématicien laquelle des géométries idéales, toutes trois absolument rigoureuses, est réalisée dans la nature, il devra répondre : *Je n'en sais rien.* Mais cela n'implique aucun scepticisme. Car, au point de vue expérimental, les géomètres connaissent parfaitement, sous trois formes

(1) Dans aucune de ces géométries, les géomètres ne disent que la parallèle à une droite est une courbe. Dans les géométries riemanniennes, les droites se rencontrent toujours ; dans les lobatchefskiennes, les parallèles à une droite sont des droites. Mgr d'Hulst a sans doute confondu l'équidistante d'une droite avec la parallèle à la droite.

différentes, le moyen de calculer, dans l'hexaèdre ABCDE, la dixième distance DE, avec une approximation égale à celle des meilleurs instruments; avant 1830, on ne connaissait qu'une manière de faire ce calcul, et l'on n'était pas même sûr de ne pas être en contradiction avec les lois de la logique en employant cette méthode ancienne.

Aucune expérience ne permet de décider en faveur de la géométrie euclidienne; car en prenant ϵ^2 suffisamment petit, le théorème de Pythagore ou la relation non euclidienne plus générale $\cos(a\epsilon) = \cos(b\epsilon)\cos(c\epsilon)$, conduisent *pratiquement* aux mêmes résultats.

On a réuni toutes les spéculations sur les trois espèces de géométrie en un corps de doctrine appelé *Métagéométrie, géométrie générale* ou *géométrie idéale*. La Métagéométrie est divisée en quatre chapitres, pour ainsi dire : l'un est consacré à la géométrie euclidienne, un autre aux géométries lobatchefskiennes, un troisième aux géométries riemanniennes; un chapitre préliminaire contient les propriétés communes aux espaces euclidien, lobatchefskiens et riemanniens. Ainsi la théorie des coniques contient, outre les généralités sur ces courbes, les chapitres relatifs à la parabole, à l'hyperbole et à l'ellipse. Cayley, Klein, Darboux et récemment Poincaré ont d'ailleurs signalé la correspondance qui existe entre la Métagéométrie et la théorie euclidienne des coniques. Chaque genre de géométrie, comme chaque conique, est caractérisé par la relation qui existe entre les distances de cinq points (1).

Bien loin d'avoir ébranlé les bases de la certitude mathématique, les géomètres, dans ces derniers temps, les ont donc plutôt consolidées. En créant la Métagéométrie, ils ont démontré que le postulat de la parallèle unique est compatible avec la définition classique de la droite et, par suite, ils ont rendu la géométrie euclidienne inattaquable au point de vue de la rigueur. En établissant l'égale valeur logique des géométries euclidienne, lobatchefskiennes et riemanniennes, en montrant qu'elles expliquent aussi bien l'une que l'autre les propriétés de l'espace réel, ils ont prouvé plus péremptoirement que ne l'a fait Gauss (*Werke*, II, p. 177, note), l'inanité de la conception kantienne de l'espace, considérée comme forme innée de l'entendement. Nulle part d'ailleurs, dans aucune des parties soit de la Métagéométrie, soit de la géométrie physique, ils n'ont besoin de recourir à des assertions arbitraires, ou jugements synthétiques *a priori* dans le sens de Kant (2).

(1) Sur l'utilité mathématique de la Métagéométrie, nous citerons un fait trop peu connu. M. Poincaré a triomphé sans peine d'une difficulté rencontrée par lui dans la théorie des fonctions fuchsiennes, grâce à la géométrie lobatchefskienne. Sans l'aide de celle-ci, dit-il, cette difficulté l'aurait peut être arrêté longtemps.

(2) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1892-1893, t. XVII, 1re partie, pp. 12-16.

IV. Sur les premiers principes de la Métagéométrie et de la Géométrie riemannienne.

1. *Premiers principes de métagéométrie.* Partons des définitions de la droite et du plan données à la page 3, et admettons que : 1° la distance CE d'un point C d'une droite AB à un point extérieur E est déterminée par les distances AB, CA, CB, EA, EB; 2° la distance DE d'un point D d'un plan ABG à un point extérieur E est déterminée par les distances AB, BG, GA, DA, DB, DG, EA, EB, EG. Nous pouvons établir les théorèmes suivants : α) *La droite AC est identique à la droite AB*; car, si E est extérieur à AB, c'est-à-dire si un second point E', au moins, est tel que AE' = AE, BE' = BE, on aura aussi E'C = EC, et, par suite, E et E' sont extérieurs à AC; et réciproquement. β) *Le plan ABD est identique à ABG*. Démonstration analogue. γ) *La droite MN est tout entière dans le plan ABG contenant les points M et N*. Car, d'après β, le plan ABG est identique à MBG et, par suite, à MNG. Si E est extérieur au plan MNG, il y a un second point E' tel que ME' = ME, NE' = NE, GE' = GE; donc, à cause des deux premières de ces égalités, E,E' sont extérieurs à MN; etc.

2. *Deux droites quelconques d'un plan riemannien se coupent en deux points situés à une distance constante.* Soient 1,2 les intersections de deux droites riemanniennes A1B, A2B, avec un cercle de centre A tracé dans le plan de ces droites avec un rayon moindre que AB. Portons sur la circonférence des arcs 23, 34, 45, etc., égaux à 12, dans un sens déterminé. Il est facile de voir que les droites A3, A4, A5, etc., passent toutes par B. Si l'arc 12 est une partie incommensurable de la circonférence, ces droites seront en nombre indéfini, et, par passage à la limite, on pourra conclure que toute droite passant par A, dans le plan A12, passe par B. Si 12 est une partie commensurable de la circonférence, la construction indiquée subdivisera cette circonférence en n parties égales, que l'on pourra chacune diviser à son tour en 2, 4, 8, etc. parties égales aussi petites que l'on veut. Les droites en nombre indéfini émanant de A et passant par ces points de subdivision aboutiront encore en B et conduiront à la même conclusion. Etc., etc.

3. *Somme des angles dans un triangle riemannien.* A. *La somme des angles d'un triangle sphérique euclidien* ABC *est supérieure à deux droits* (1). Soit E le milieu de CB; menons AE et prolongeons cette ligne d'une longueur EF = AE; menons aussi CF, FB. Le triangle CEF sera égal à BEA et EFB à EAC. Supposons le point F à l'intérieur du triangle CBO, O étant le point de rencontre de AC et AB, point diamétralement opposé à A. Soit encore I le milieu de BF, joignons AI et prolongeons cette ligne de IJ = AI. Si le point J est à l'intérieur du triangle BFO, soit L le milieu de

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. Cette démonstration nous a été communiquée par M. De Tilly.

BJ, et LM = AL sur le prolongement de AL. Si le point M est à l'intérieur du triangle BJO, faisons encore une construction analogue sur le triangle ABM et continuons de même indéfiniment.

La somme des angles dans les triangles successifs ABC, ABF, ABJ, ABM, ... est toujours la même, comme il est facile de le voir. Bien entendu, on prend pour l'angle en B des triangles ABF, ABJ, ABM, les sommes

$$ABE + EBF, \quad ABI + IBJ, \quad ABL + LBM, \ldots$$

Si l'un de ces angles B, toujours de plus en plus grands, est obtus ou égal à deux droits, autrement dit, si l'un des points I, L, etc. se trouve en dehors du triangle BCO ou sur BO, le théorème est démontré ; car évidemment cet angle en B, avec les deux autres angles du triangle considéré, a une somme supérieure à deux droits.

Or l'un des points I, L, etc. est nécessairement en dehors de BCO. En effet, soit D le milieu de AC ; joignons D, E par un arc de grand cercle. Le triangle CDE est égal au triangle BEI. Par suite, angle CED = angle IEB, EI = DE et en est le prolongement. On démontre de même que IL = EI et que L est aussi sur l'arc de grand cercle DEI. Cet arc de cercle DEI coupe ACO, en un point P, situé au delà de O, à une distance OP = AD. Par suite, en portant sur cet arc DEI, indéfiniment des arcs EI, IL, etc. égaux à DE, l'un au moins des points I, L, se trouvera sur l'arc DE, à l'extérieur du triangle BCO (1). Le théorème est donc démontré.

B. La géométrie non euclidienne de Riemann dans le plan étant identique à la géométrie euclidienne de la sphère, on voit, par ce qui précède, qu'elle peut être établie d'une manière élémentaire, sans faire intervenir la théorie des coniques, celle de la courbure des surfaces ou celle des groupes.

La construction employée dans la démonstration donnée plus haut est empruntée à Euclide (*Eléments*, I, 16). En rendant rigoureuse la démonstration donnée par Legendre (*Éléments de Géométrie*, I, 19, 12e édition), on peut aussi déduire de cette même construction à la fois le principe fondamental de la géométrie lobatchefskienne et celui de la géométrie euclidienne (2).

Les trois géométries peuvent donc être établies d'une manière simple à partir des *Éléments* d'Euclide.

(1) On observera que DE étant inférieur à DEP, est toujours plus petit qu'une demi-circonférence.

(2) L'angle obtus variable considéré dans cette démonstration a une limite, ou bien inférieure à deux droits, ce qui donne la géométrie lobatchefskienne, ou bien égale à deux droits, ce qui donne la géométrie euclidienne.

IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK
Bruxelles, rue des Ursulines, 37 ; Louvain (ancienne maison Lefever) rue des Orphelins, 30.